Opgave 6 Analyse tentamen

Bram Westerbaan

July 5, 2007

Te Bewijzen: De kenningregel voor differtieren:

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g \cdot g')(x)$$

Waarbij g en f differentieerbare functies zijn op x.

Dit bewijs is ongeveer het bewijs dat op wikipedia staat, maar dan hopelijk duidelijker:

Bewijs: Zij x zo gekozen dat $\exists f'(g(x))$ en $\exists g'(x)$. Er geldt in het algemeen voor de afgeleide als lineaire benadering voor een of andere functie A dat:

$$A(x) \approx A(x_0) + A'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Ofwel voor $h := x - x_0$:

$$A(x) = A(x_0 + h) \approx A(x_0) + A'(x_0) \tag{2}$$

Waarbij $\approx$ betekend in dit geval dat $\exists \alpha$ met als $h \to 0$ dan $\alpha \to 0$ en verder:

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = h \cdot A'(x_0) + h\alpha \tag{3}$$

Dus geldt voor f en g:

$$g(x+h) - g(x) = h \cdot g'(x) + h\gamma(h) \tag{4}$$
$$f(x+k) - f(x) = k \cdot f'(x) + k\xi(k) \tag{5}$$

Waarbij $k \to 0 \Rightarrow \xi \to 0$ en $h \to 0 \Rightarrow \gamma \to 0$. We weten alleen dat f' bestaat op $g(x)$; laten we g dus invullen in de bovenstaande vergelijking:

$$f(g(x)+k) - f(x) = k \cdot f'(g(x)) + k\xi(h) \tag{6}$$

Als we $g(x+h)$ oplossen uit vergelijking 4 en dat weer invullen in de uitdrukking $f(g(x+h)) - f(g(x))$ volgt:

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = f(g(x) + h \cdot g'(x) + h\gamma(h)) - f(g(x)) \tag{7}$$
$$= f\left(g(x) + \hat{h}\right) - f(g(x)) \tag{8}$$

Waar $\hat{h} := h \cdot g'(x) + h\gamma(h)$. Volgens vergelijking 5 moet er voor deze vergelijking gelden:

$$f\left(g(x) + \hat{h}\right) - f(g(x)) = \hat{h} \cdot f'(g(x)) + \hat{h}\xi\left(\hat{h}\right) \tag{9}$$

We kunnen vergelijking 9 en 8 samenvoegen en delen door $h \neq 0$; er volgt:

$$\frac{f\left(g\left(x+h\right)\right)-f\left(g\left(x\right)\right)}{h} = \frac{\hat{h}\cdot f'\left(g\left(x\right)\right)+\hat{h}\xi\left(\hat{h}\right)}{h} \tag{10}$$

Merk op dat $h \to 0 \Rightarrow \hat{h} \to h\,g'\left(x\right)$ en dus $\hat{h} \to 0$ en tevens $\xi\left(\hat{h}\right) \to 0$ en daarom geldt voor de bovenstaande vergelijking als we het limiet over $h \to 0$ nemen:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g\left(x+h\right)\right)-f\left(g\left(x\right)\right)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\hat{h}\cdot f'\left(g\left(x\right)\right)+\hat{h}\xi\left(\hat{h}\right)}{h} && (11)\\
&= g'\left(x\right)\cdot f'\left(g\left(x\right)\right)+g'\left(x\right)\lim_{h\to 0}\xi\left(\hat{h}\right) && (12)\\
&= g'\left(x\right)\cdot f'\left(g\left(x\right)\right) && (13)
\end{aligned}$$

Dat is hetgeen te bewijzen, want het linkerlid is per definitie $\left(f\circ g\right)'\left(x\right)$.

$\square$